

## ESERCIZIO 1

$E$  = Almeno 1 persona ha il nostro compleanno

$n$  = Numero di persone

$$P(E) = 1 - P(E^c) = 1 - \frac{D_{365,n}^*}{D_{365,n}^*} = 1 - \left(\frac{364}{365}\right)^n$$

Quando  $P(E) > \frac{1}{2}$ ?

$$\left(\frac{364}{365}\right)^n < 0.5 \Rightarrow \dots \Rightarrow n > \frac{\ln(\frac{1}{2})}{\ln(\frac{364}{365})}$$

## ESERCIZIO 2

13 Numeri divisi in 8 e 5 **manca testo corretto**

A 7  
B 5  
C 1

1. **manca obj**

$$P(A \cap B) = 1 - P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - [P(\bar{A}) + P(\bar{B}) - \underbrace{P(\bar{A} \cap \bar{B})}_{=0}]$$

$$P(\bar{A}) = \frac{\binom{7}{7}}{\binom{13}{7}} \quad P(\bar{B}) = \frac{\binom{8}{5}}{\binom{13}{5}}$$

2. Calcolare la probabilità che A e B siano avvelenati e C sta bene

$$P(A \cap B | \bar{C}) = 1 - \left[ \frac{\binom{7}{7}}{\binom{12}{7}} + \frac{\binom{5}{5}}{\binom{12}{5}} \right]$$

3. Calcolare che tutti e 3 si siano intossicati  $P(A \cap B \cap C)$

Facile calcolare intersezione quando gli eventi sono indipendenti.

Ma è più facile in questo caso calcolare la condizionale  $P(E \cap F) = P(E|F)P(F)$ .

$$P(A \cap B \cap C) = P(A \cap B | C)P(C) = \left(1 - \left[ \frac{\binom{8}{7}}{\binom{12}{7}} + \frac{\binom{5}{5}}{\binom{12}{5}} \right]\right) \cdot \frac{5}{13}$$

## ESERCIZIO 3

Lancio una moneta, se esce testa prende il treno, croce a casa.

In stazione 6 treni diversi. Lancia dado per scegliere.

Visto che non era su nessuno dei 5 treni, qual era la probabilità che fosse sul sesto?

$$P(C) = \frac{1}{2}$$

$$T_1, \dots, T_6 \quad P(T_i) = \frac{1}{12}$$

$$P(T_6|\bar{T}_1 \cap \dots \cap \bar{T}_6) = P(T_6|T_6 \cup C) = \frac{P(T_6 \cap \{T_6 \cup C\})}{P(T_6 \cup C)} = \frac{P(T_6)}{P(T_6) + P(C) - \underbrace{P(T_6 \cap C)}_{=0 \text{ A casa E sul treno? imposs.}}}$$

$$= \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{12} + \frac{1}{2}} = \frac{1}{7}$$

## ESERCIZIO 4

Abbiamo una roulette equilibrata con solo i numeri da 1 a 12.

1,3,5,6,10,12 sono Rossi

2,4,7,8,9,11 sono Rossi

$A$  = Numero pari    $B$  = Numero rosso    $C = \leq 3$     $D = \leq 6$     $E = \leq 8$

1. A,B sono indipendenti?

E, F indipendenti  $\iff P(E \cap F) = P(E)P(F) \iff P(E|F) = P(E)$  (F non condiziona su E)

$P(A) = \frac{1}{2}$     $P(B) = \frac{1}{2}$     $P(A \cap B) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \Rightarrow$  E, F indipendenti

2. A,B,D sono indipendenti 2 a 2? (A e D sono indep? B e D sono indep?)

$$P(D) = \frac{1}{2}$$

$P(A \cap D) = \frac{1}{4}$  (non scritto: Num. di casi favor. / poss. è uguale alla molt. delle prob. di A e D)

$P(B \cap D) = \frac{1}{3}$  (Non sono indep. perché non rispecchiano cond. sopra)

3. test

$$P(E) = \frac{2}{3} \quad P(A \cap E) = \underbrace{\frac{4}{12}}_{\substack{\text{Casi fav.} \\ \text{Casi poss.}}} = \frac{1}{3} = \underbrace{\frac{2}{3}}_{P(A)} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}}_{P(E)}$$

$$P(E \cap B \cap A) \stackrel{?}{=} P(A)P(B)P(E)$$

$P(A \cap B \cap E) = \frac{1}{12}$  (Numero 6)  $\neq \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \Rightarrow$  A,B,E non indep.

## ESERCIZIO 5

Sappiamo che le consegne possono essere in città o fuori città  $F$ .

Può poi essere urgente  $U$  o non urgente.

Sappiamo che

$$P(\text{Fuori città}) = P(F) = 0.4$$

$$P(\text{Urgente}) = P(U) = 0.3$$

$$P(\text{In città e non urgente}) = P(\bar{F} \cap \bar{U}) = 0.4 = 1 - P(F \cup U)$$

1.  $P(F \cap U)$ ?

$$P(F \cap U) = P(F) + P(U) - P(F \cup U) = 0.4 + 0.3 - 0.6 = 0.1$$

$P(F)P(U) \neq P(F \cap U) \iff$  F,U non sono indipendenti

Notiamo anche che  $P(F|U) < P(F)$

$$2. P(U \cap \bar{F})?$$

$$P(U \cap \bar{F}) = P(U) - P(U \cap F) = 0.2$$

## ESERCIZIO 6

Sanno entrambi che il giocatore più forte nel tennis club è Carlo.

Un papà dà la macchina al figlio Andrea a una condizione:

devi giocare 3 partite, alternativamente con me e Carlo.

Se ne vince 2 di fila può avere la macchina.

1. Qual è la comb. di match migliore per massimizzare la vincita?

Ipotesi:

$$P(\text{Andrea vince contro padre}) = p_1$$

$$P(\text{Andrea vince contro Carlo}) = p_2$$

$$p_2 < p_1$$

$p_1, p_2$  Indipendenti

$$V_1, V_2, V_3 \quad M = \text{Andrea vince la macchina}$$

$$M = (V_1 \cap V_2 \cap V_3) \cup (V_1 \cap V_2 \cap \bar{V}_3) \cup (\bar{V}_1 \cap V_2 \cap V_3)$$

Gli eventi sono indep. quindi

$$P(M) = P(V_1 \cap V_2 \cap V_3) + P(V_1 \cap V_2 \cap \bar{V}_3) + P(\bar{V}_1 \cap V_2 \cap V_3)$$

- Caso P-C-P  $p_1 p_2 p_1 + p_1 p_2 (1 - p_1) + (1 - p_1) p_2 p_1 = p_1 p_2 (2 - p_1)$
- Caso C-P-C  $p_2 p_1 p_2 + p_2 p_1 (1 - p_2) + (1 - p_2) p_1 p_2 = p_1 p_2 (2 - p_2)$

Giocare P-C-P è sicuramente più favorevole.

## ESERCIZIO 7

Abbiamo una moneta equilibrata e la lanciamo 3 volte.

$A$  = Testa al primo lancio  $B$  = 1° e 2° lancio hanno risultati diversi

$C$  = Almeno 2 teste

$$\Omega = \{ttt, ttc, tct, ctt, tcc, ctc, cct, ccc\} \quad |\Omega| = 8$$

$$P(A) = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4} \text{ (fav / poss, } A, B \text{ indipendenti)}$$

$$P(A|C) = \frac{3}{4}$$

$$P(B|C) = \frac{1}{2}$$

$$P(P \cap B|C) = \frac{1}{4} \text{ (Diverso da prod. dei due)}$$

**L'indipendenza non si conserva obbligatoriamente all'aggiungere di condizioni!**

$E$  = Almeno 1 testa tra il 1° e il 2° lancio  $E$  = Almeno 1 testa tra il 2° e il 3° lancio

$G$  = Il 2° lancio è croce

$$P(E) = \frac{3}{4} \quad P(F) = \frac{3}{4}$$

$$P(E \cap F) = \frac{5}{8} \neq \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \Rightarrow E, F \text{ non indipendenti}$$

$$P(E|G) = \frac{1}{2} \quad P(F|G) = \frac{1}{2}$$

$$P(E \cap F|G) = \frac{1}{4} = P(E)P(F)$$

**Gli eventi  $E, F$  non erano indipendenti ma lo possono diventare all'aggiungere di condizioni!**

## ESERCIZIO 8

$C$  = Passa corrente

1. Supponiamo di avere 2 interruttori in serie.

$$P(C) = P(I_1 \text{ chiuso} \cap I_2 \text{ chiuso}) = p_1 p_2$$

2. Supponiamo di avere 2 interruttori in parallelo.

$$P(C) = P(I_1 \text{ chiuso} \cup I_2 \text{ chiuso}) = p_1 + p_2 - p_1 p_2 = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2)$$

3. Supponiamo di avere 3 interruttori, di cui  $I_1$  e  $I_2$  in serie  $I_{12}$ , entrambi in parallelo con  $I_3$ .

$$P(I_1) = 0.8 \quad P(I_2) = 0.9 \quad P(I_3) = 0.7$$

$$P(I_{12}) = P(I_1)P(I_2) = 0.8 \cdot 0.9 = 0.72$$

$$P(C) = P(I_{12}) + P(I_3) - P(I_{12} \cap I_3) = P(I_{12}) + P(I_3) - P(I_{12})P(I_3)$$

$$= 0.72 + 0.77 - 0.72 \cdot 0.7 = 0.896 = 1 - 0.104$$

4. Qual è la probabilità che l'interruttore  $I_1$  sia aperto ma non passa corrente?

$$\text{Bayes: } P(I_1|\bar{C}) = \frac{P(\bar{C}|I_1)P(I_1)}{P(\bar{C})} = \frac{0.3 \cdot 0.2}{0.104} = \frac{0.06}{0.104}$$

## COMPITO 1

Supponiamo di avere 4 interruttori con stessa probabilità  $I_i = p$ , in serie a 2 a 2 e in parallelo.

1.  $P(C)$ ?
2. C'è un interruttore  $I_5$  tra il nodo in mezzo tra  $I_1$  e  $I_2$  e il nodo in mezzo tra  $I_3$  e  $I_4$

## COMPITO 2

Pavimento a piastrelle quadrate di lato 20cm.

Un piattino da caffè con raggio 5cm cade sul pavimento.

$E_n$  = Il piattino cade toccando  $n$  piastrelle

$$P(E_1) = \frac{10 \times 10}{20 \times 20} = \frac{100}{400} = \frac{1}{4} \quad P(E_2) = \frac{5 \times 10 \times 4}{400} = \frac{200}{400} = \frac{1}{2} \quad P(E_4) = \frac{5 \times 5 \times \pi}{400} = \frac{100\pi}{400} = \frac{\pi}{4}$$

$$P(E_3) = \frac{4 - \pi}{16}$$

$X = n^\circ$  di piastrelle

$$X = \underbrace{1}_{\frac{1}{4}} \quad \underbrace{2}_{\frac{1}{2}} \quad \underbrace{3}_{\frac{4-\pi}{16}} \quad \underbrace{4}_{\frac{\pi}{16}}$$

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \frac{1}{4} & 1 \leq x < 2 \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} & 2 \leq x < 3 \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{4-\pi}{16} = 1 - \frac{\pi}{16} & 3 \leq x < 4 \\ 1 & x \geq 4 \end{cases}$$

(Grafico:  $f$  a scalini per i vari intervalli indicati)

$$\bar{E}(x) = 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{4-\pi}{16} + 4 \frac{\pi}{16} = 2 + \frac{\pi}{16}$$